

Non-Markovian Dynamics in the Open Quantum Systems

Filip A. Wudarski

9 września 2015

Plan

- 1 Wstęp
 - Dynamika układów otwartych
 - Markowowskość dynamiki
- 2 Ewolucja lokalna w czasie
 - Ewolucja qubitów w modelu losowej dynamiki unitarnej
 - Markowowskość dynamiki
 - Stopień niemarkowowskości ewolucji
- 3 Ewolucja nielokalna w czasie
 - Ewolucja qubitów
- 4 Podsumowanie

Dynamika układów otwartych

Układ otwarty opisywany jest przez stan $\rho_{SE}(t) \in S(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E)$. Zakładamy, że w chwili początkowej nasz układ jest w stanie produktowym $\rho_{SE}(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0)$. Ewolucja podukładu S opisywana jest przez odwzorowanie dynamiczne

$$\Lambda_t(\rho_S(0)) = \rho_S(t) \equiv \rho_t. \quad (1)$$

Dynamika układów otwartych

Odwzorowanie Λ_t spełniać musi następujące warunki

- być kompletnie dodatnie (CP),
- zachowywać ślad macierzy (TP),
- $\Lambda_0 = \mathbb{1}$.

Dynamika układów otwartych

Dynamikę możemy przedstawić w postaci lokalnej w czasie

$$\dot{\Lambda}_t = L_t \Lambda_t \quad (2)$$

lub nielokalnej

$$\dot{\Lambda}_t = \int_0^t K_{t-\tau} \Lambda_\tau d\tau. \quad (3)$$

Markowowskość dynamiki

Istnieją różne definicje markowowskości dynamiki

- podzielność,
- rozróżnialność stanów – BLP,
- dostępność stanów (opis geometryczny),
- oparte o entropię względną, fidelity czy informację wzajemną,
- stopień niemarkowowskości.

Ewolucja lokalna w czasie

Rozważamy model lokalny w czasie, z generatorem zależnym od czasu

$$\dot{\Lambda}_t = L_t \Lambda_t \quad (4)$$

Model losowej dynamiki unitarnej dla qubitów

Rozważamy odwzorowanie postaci

$$\Lambda_t(X) = \sum_{\alpha=0}^3 p_{\alpha}(t) \sigma_{\alpha} X \sigma_{\alpha}, \quad (5)$$

gdzie

- $p_{\alpha}(t) \geq 0$,
- $\sum_{\alpha} p_{\alpha}(t) = 1$,
- $p_{\alpha}(0) = \delta_{\alpha 0}$.

Model losowej dynamiki unitarnej dla qubitów

Generator dynamiki jest postaci

$$L_t(X) = \sum_{k=1}^3 \gamma_k(t) (\sigma_k X \sigma_k - X). \quad (6)$$

Markowskość dynamiki

Dynamika jest markowska (podzielna) wtedy i tylko wtedy gdy $\gamma_k(t) \geq 0$ dla $t \geq 0$ oraz $k = 1, 2, 3$.

Dynamika jest BLP markowska wtedy i tylko wtedy gdy

$$\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \geq 0, \quad (7)$$

$$\gamma_1(t) + \gamma_3(t) \geq 0, \quad (8)$$

$$\gamma_2(t) + \gamma_3(t) \geq 0. \quad (9)$$

D. Chruściński and F. A. Wudarski, *Non-Markovian random unitary qubit dynamics*, Phys. Lett. A **377**, 1425-1429 (2013).

Model losowej dynamiki unitarnej

Rozważmy dynamikę postaci

$$\Lambda_t(X) = \sum_{\alpha=0}^{d^2-1} p_{\alpha}(t) U_{\alpha} X U_{\alpha}^{\dagger}, \quad (10)$$

gdzie U_{α} są macierzami Weyla oraz

- $p_{\alpha}(t) \geq 0$,
- $\sum_{\alpha} p_{\alpha}(t) = 1$,
- $p_{\alpha}(0) = \delta_{\alpha 0}$.

Model losowej dynamiki unitarnej

Generator dany jest

$$L_t(X) = \sum_{k=1}^{d^2-1} \gamma_k(t) (U_k X U_k^\dagger - X). \quad (11)$$

Stopień niemarkowskości ewolucji

Dla $d = 3$ mamy

- $\gamma_k(t) \geq 0$ to $NMD[\Lambda_t] = 0$,
- Jeśli $\gamma_k(t) \not\geq 0$ ale $\gamma_{i_1}(t) + 2\gamma_{i_2}(t) \geq 0$ to $NMD[\Lambda_t] = 1$,
- Jeśli $\gamma_{i_1}(t) + 2\gamma_{i_2}(t) \not\geq 0$ ale $\gamma_{i_1}(t) + \gamma_{i_2}(t) + \gamma_{i_3}(t) \geq 0$ to $NMD[\Lambda_t] = 2$.
- Jeśli $\gamma_{i_1}(t) + \gamma_{i_2}(t) + \gamma_{i_3}(t) \not\geq 0$ to nie musi oznaczać, że $NMD[\Lambda_t] = 3$.

D. Chruscinski and F. A. Wudarski, *Non-Markovianity degree for random unitary evolution*, Phys. Rev. A **91**, 012104 (2015).

Ewolucja nielokalna w czasie

$$\dot{\Lambda}_t = \int_0^t K_{t-\tau} \Lambda_\tau d\tau. \quad (12)$$

Ewolucja qubitów

Rozważamy odwzorowanie postaci

$$\Lambda_t(X) = \sum_{\alpha=0}^3 p_{\alpha}(t) \sigma_{\alpha} X \sigma_{\alpha}, \quad (13)$$

gdzie

- $p_{\alpha}(t) \geq 0$,
- $\sum_{\alpha} p_{\alpha}(t) = 1$,
- $p_{\alpha}(0) = \delta_{\alpha 0}$.

Ewolucja qubitów

Odwzorowanie można przedstawić w formie rozkładu spektralnego

$$\Lambda_t(X) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \lambda_{\alpha}(t) \sigma_{\alpha} \text{Tr}(\sigma_{\alpha} X), \quad (14)$$

Jądro pamięci jest postaci

$$K_t(X) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \kappa_k(t) \sigma_k \text{Tr}(\sigma_k X). \quad (15)$$

Twierdzenie 1

Twierdzenie

Odwzorowanie $\tilde{\Lambda}_s$ określone przez rozkład spektralny

$$\tilde{\Lambda}_s(X) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \tilde{\lambda}_\alpha(s) \sigma_\alpha \text{Tr}(\sigma_\alpha X), \quad (16)$$

z $\tilde{\lambda}_0(s) = \frac{1}{s}$, definiuje transformatę Laplace'a odwzorowania dynamicznego Λ_t wtedy i tylko wtedy gdy następujące warunki są spełnione:

Warunki

$$\frac{1}{s} + \tilde{\lambda}_1(s) + \tilde{\lambda}_2(s) + \tilde{\lambda}_3(s) \text{ jest CM}$$

$$\frac{1}{s} + \tilde{\lambda}_1(s) - \tilde{\lambda}_2(s) - \tilde{\lambda}_3(s) \text{ jest CM}$$

$$\frac{1}{s} - \tilde{\lambda}_1(s) + \tilde{\lambda}_2(s) - \tilde{\lambda}_3(s) \text{ jest CM}$$

$$\frac{1}{s} - \tilde{\lambda}_1(s) - \tilde{\lambda}_2(s) + \tilde{\lambda}_3(s) \text{ jest CM}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{\lambda}_k(s) = 1.$$

Twierdzenie 2

Twierdzenie

Niech $W(s)$ będzie funkcją taką, że $\frac{1}{s} \frac{1}{W(s)}$ jest CM. Wtedy funkcje

$$\tilde{\kappa}_k(s) = -\frac{s}{a_k W(s) - 1}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (17)$$

z czynnikami $a_1, a_2, a_3 > 0$ takimi, że

$$\frac{1}{s} \left(4 - \frac{1}{W(s)} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right] \right) \text{ jest CM,} \quad (18)$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{a_3} \quad +\text{cykliczne perm.} \quad (19)$$

definiują dobre jądro pamięci.

Twierdzenie 3

Twierdzenie

Niech $W(s)$ będzie wielomianem

$$W(s) = (s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_n), \quad (20)$$

gdzie $z_i > 0$. Jeżeli $a_1, a_2, a_3 > 0$ spełniają (20) oraz

$$\prod_{i=1}^n z_i \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right), \quad (21)$$

wtedy

$$\tilde{\kappa}_k(s) = -\frac{s}{a_k W(s) - 1}, \quad (22)$$

proceeds to legal dynamics.

Warunek BLP

Uwaga!

Dla jąder zbudowanych jak w Twierdzeniu 3, dynamika zawsze jest BLP markowska!

F.A. Wudarski, P. Należyty, G. Sarbicki and D. Chruściński, *Admissible memory kernels for random unitary qubit evolution*, Phys. Rev. A **91**, 042105 (2015).

- Analiza modelu losowej dynamiki unitarnej,
- Porównanie różnych definicji markowowskości,
- Wyrażenie warunków BLP wyłącznie przez współczynniki generatora,
- Określenie stopnia niemarkowowskości poprzez współczynniki generatora,
- Zdefiniowanie warunków w dziedzinie częstości dla nielokalnej dynamiki qubitów,
- Zaprezentowanie warunków na jądro pamięci, które prowadzą do legalnej dynamiki,
- Określenie warunków BLP w nielokalnej w czasie ewolucji.