

Strategie semi - kooperatywne w teorii gier

Joanna Zwierzchowska

Wydział Matematyki i Informatyki UMK

09.09.2015r. Toruń

Tytuł projektu: Strategie semi - kooperatywne w grach różniczkowych modelujących problemy marketingowe

dr hab. S.Plaskacz (matematyka) + prof. dr hab. T.Kufel (ekonomia)

Cel matematyczny

Wyznaczenie strategii semi - kooperatywnych dla gry różniczkowej opisującej duopol.

Cele pośrednie:

- wyznaczenie układu równań opisującego funkcję wartości odpowiadającej strategii semi - kooperatywnej,
- rozwiązanie uzyskanego układu metodami numerycznymi.

Cele ekonomiczne

- Estymacja modelu dynamicznego opisującego zachowanie producentów na rzeczywistym rynku konkurencyjnym.
- Wyznaczenie semi - kooperatywnych strategii marketingowych – zasotosowanie wiedzy zdobytej w części matematycznej.
- Skonfrontowanie empirycznych wyników ze stosowaną przez graczy strategią marketingową.

Wiadomości wstępne – gry dwuosobowe

Gra $G = (J_1, J_2) : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Wypłaty $J_i(u_1, u_2)$, $i = 1, 2$ – funkcje zysku.

Cel graczy: Znalezienie strategii **maksymalizującej** zysk.

Problem: funkcja wypłaty każdego z graczy – $J_i(u_1, u_2)$ – zależy od strategii gracza oraz strategii przeciwnika.

Równowaga Nasha

$(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ – Równowaga Nasha, gdy

$$J_1(s_1, s_2^*) \leq J_1(s_1^*, s_2^*) \quad \text{i} \quad J_2(s_1^*, s_2) \leq J_2(s_1^*, s_2^*)$$

dla dowolnej dopuszczalnej pary strategii $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$.

Równowaga Nasha

$(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ – Równowaga Nasha, gdy

$$J_1(s_1, s_2^*) \leq J_1(s_1^*, s_2^*) \quad \text{i} \quad J_2(s_1^*, s_2) \leq J_2(s_1^*, s_2^*)$$

dla dowolnej dopuszczalnej pary strategii $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$.

Optimum Pareto

$(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ – Optimum Pareto, jeśli nie istnieje dopuszczalna multistrategia $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ taka, że

$$J_1(s_1, s_2) \geq J_1(s_1^*, s_2^*) \quad \text{i} \quad J_2(s_1, s_2) \geq J_2(s_1^*, s_2^*).$$

Ilustracja

Rozważmy następującą grę macierzową G – Dylemat Więźnia:

	Z	W
Z	$(1, 1)$	$(3, 0)$
W	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Ilustracja

Rozważmy następującą grę macierzową G – Dylemat Więźnia:

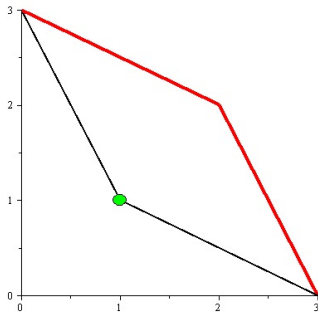
	Z	W
Z	$(1, 1)$	$(3, 0)$
W	$(0, 3)$	$(2, 2)$

Równowaga Nasha (jedyna):

$$G(Z, Z) = (1, 1),$$

Pareto Optimum (sprawiedliwe):

$$G(W, W) = (2, 2).$$



Duopol

- $x(t) := x_1(t) \in [0, 1]$ – udział w rynku pierwszej firmy w chwili $t \in [0, T]$,
 $1 - x(t) =: x_2(t)$ – udział w rynku drugiej firmy w chwili t ,
 $u_1(t) > 0, u_2(t) > 0$ – wydatki, jakie ponoszą na reklamę odpowiednio firma pierwsza i druga w chwili t .

Duopol

- $x(t) := x_1(t) \in [0, 1]$ – udział w rynku pierwszej firmy w chwili $t \in [0, T]$,
 $1 - x(t) =: x_2(t)$ – udział w rynku drugiej firmy w chwili t ,
 $u_1(t) > 0, u_2(t) > 0$ – wydatki, jakie ponoszą na reklamę odpowiednio firma pierwsza i druga w chwili t .

Model Bressana - Shen:

$$\dot{x}(t) = x(t)(1 - x(t))(u_1(t) - u_2(t))$$

Model Lanchestera:

$$\dot{x}(t) = u_1(t)(1 - x(t)) - u_2(t)x(t)$$

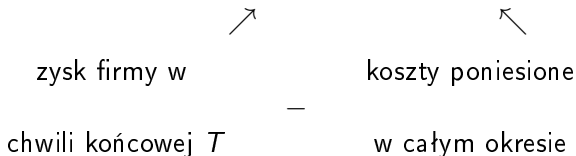
Warunek początkowy:

$$x(\tau) = x_0 \in [0, 1].$$

Ogólna dynamika: $\dot{x} = f(x) + \phi(x)u_1 + \psi(x)u_2$.

Funkcje zysku

$$J_i(\tau, x_0, u_1, u_2) := g_i(x_i(T)) - \int_{\tau}^T h_i(x, u_i(t)) dt,$$


zysk firmy w chwili końcowej T — koszty poniesione w całym okresie

Założenia:

- g_i – dodatnia funkcja rosnąca,
- h_i – funkcja gładka, ściśle wypukła ze względu na u_i .

Przeformułowanie problemu - strategie typu feedback

Dynamika: $\dot{x} = f(x, u_1, u_2)$, warunek początkowy: $x(\tau) = x_0$, funkcjonały zysku: (J_1, J_2)



strategie „optymalne”: $u^*(x, p_1, p_2)$



Przeformułowanie problemu - strategie typu feedback

Dynamika: $\dot{x} = f(x, u_1, u_2)$, warunek początkowy: $x(\tau) = x_0$, funkcjonały zysku: (J_1, J_2)



strategie „optymalne”: $u^*(x, p_1, p_2)$



Przy pewnych założeniach o regularności, funkcja wartości $V = (V_1, V_2) = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2)$ spełnia układ równań Hamiltona - Jacobiego:

$$\begin{cases} (V_1)_t + H_1(x, (V_1)_x, (V_2)_x) = 0 \\ (V_2)_t + H_2(x, (V_1)_x, (V_2)_x) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_1(T, x) = g_1(x_1(T)) \\ V_2(T, x) = g_2(x_2(T)) \end{cases} \quad (*)$$

Zamiana problemu z warunkiem początkowym i funkcją wypłaty na problem z warunkiem końcowym.

Optymalność – w jakim sensie?

Funkcjonały natychmiastowego zysku:

$$Y_i(x, p_1, p_2, u_1, u_2) = p_i \cdot (f(x) + \phi(x)u_1 + \psi(x)u_2) - h_i(x, u_i).$$

Równowaga Nasha: $u_i^*(x, p_1, p_2) = u_i^N(x, p_1, p_2)$

Uwaga: $x \in U \subset \mathbb{R}$ - układ (*) jest dobrze postawionym problemem tylko gdy $V_1' V_2' > 0$!

Optymalność – w jakim sensie?

Funkcjonały natychmiastowego zysku:

$$Y_i(x, p_1, p_2, u_1, u_2) = p_i \cdot (f(x) + \phi(x)u_1 + \psi(x)u_2) - h_i(x, u_i).$$

Równowaga Nasha: $u_i^*(x, p_1, p_2) = u_i^N(x, p_1, p_2)$

Uwaga: $x \in U \subset \mathbb{R}$ - układ (*) jest dobrze postawionym problemem tylko gdy $V'_1 V'_2 > 0$!

Strategie semi-kooperatywne (bazujące na kryterium Pareto optymalności)
– Bressan, Shen (2004):

$$(u_1^P(x, p_1, p_2, s), u_2^P(x, p_1, p_2, s)) = \arg \max_{(u_1, u_2)} Y_s(x, p_1, p_2, u_1, u_2)$$

gdzie $Y_s = sY_1 + Y_2$ oraz $s > 0$ (**problem:** jednoznaczność wyboru!)

Strategie semi - kooperatywne: $u_i^S(x, p_1, p_2) = u_i^P(x, p_1, p_2, s(x, p_1, p_2))$,

dla pewnej funkcji $s(x, p_1, p_2)$.

Główny wynik

Twierdzenie

- 1 $s = s(x, p_1, p_2)$ – funkcja gładka (racjonalnie uzasadniony wybór sterowania Pareto - optymalnego przy ustalonych x, p_1, p_2),
- 2 gracze stosują strategie semi - kooperatywne: (u_1^s, u_2^s) ,
- 3 (p_1, p_2) należy do otwartego zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^{2m}$.

Jeśli zachodzą powyższe warunki, to układ (*) jest słabo hiperboliczny na Ω .

W sytuacji jednowymiarowej przestrzeni stanu ($m = 1$), układ (*) jest ściśle hiperboliczny poza trzema krzywymi na płaszczyźnie (p_1, p_2) .

Hiperboliczność – istotność

Duopol – przestrzeń stanu jest jednowymiarowa ($m = 1$).

Warunkiem niezbędnym do uzyskania istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu Hamiltona - Jacobiego jest jego ścisła hiperboliczność.

Wniosek:

U podstaw jakichkolwiek prób rozwiązywania uzyskanych układów metodami numerycznymi musi leżeć conajmniej ścisła hiperboliczność rozważanego układu.

Jednoznaczność strategii semi - kooperatywnych

$$u_i^s(x, p_1, p_2) = u_i^P(x, p_1, p_2, s(x, p_1, p_2)), \quad i = 1, 2.$$

$s(x, p_1, p_2)$ – dla ustalonego x, p_1, p_2 wskazuje „stopień kooperacji”.

1. racjonalność wyboru: $Y_i^P(s) \geq Y_i^N$ dla $i = 1, 2$.
2. jednoznaczność wyboru – warunek „sprawiedliwy” (Bressan, Shen (2004)):

$$\begin{aligned} Y_1(x, p_1, p_2, u_1^P, u_2^P) - Y_1(x, p_1, p_2, u_1^N, u_2^N) = \\ = Y_2(x, p_1, p_2, u_1^P, u_2^P) - Y_2(x, p_1, p_2, u_1^N, u_2^N). \end{aligned}$$

Jednoznaczność strategii semi - kooperatywnych

$$u_i^s(x, p_1, p_2) = u_i^P(x, p_1, p_2, s(x, p_1, p_2)), \quad i = 1, 2.$$

$s(x, p_1, p_2)$ – dla ustalonego x, p_1, p_2 wskazuje „stopień kooperacji”.

1. racjonalność wyboru: $Y_i^P(s) \geq Y_i^N$ dla $i = 1, 2$.
2. jednoznaczność wyboru – warunek „sprawiedliwy” (Bressan, Shen (2004)):

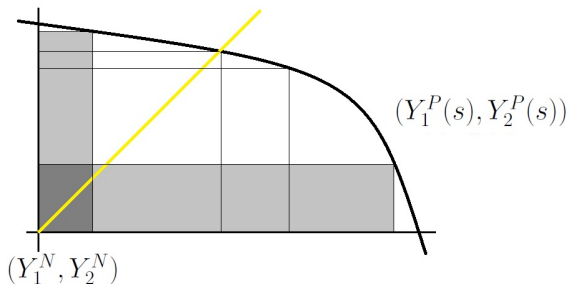
$$\begin{aligned} Y_1(x, p_1, p_2, u_1^P, u_2^P) - Y_1(x, p_1, p_2, u_1^N, u_2^N) = \\ = Y_2(x, p_1, p_2, u_1^P, u_2^P) - Y_2(x, p_1, p_2, u_1^N, u_2^N). \end{aligned}$$

2. Para $(\tilde{Y}_1^P, \tilde{Y}_2^P)$ jest **rozwiązaniem Nasha problemu przetargowego** (Nash, 1950), gdy

$$(\tilde{Y}_1^P - Y_1^N)(\tilde{Y}_2^P - Y_2^N) \geq (Y_1^P(s) - Y_1^N)(Y_2^P(s) - Y_2^N)$$

dla każdego $(Y_1^P(s), Y_2^P(s))$.

Ilustracja



kryterium B&S $Y_1^P(s) - Y_1^N = Y_2^P(s) - Y_2^N.$

warunek Nasha: $s(x, p_1, p_2) = \arg \max_{s > 0} \{ (Y_1^P(s) - Y_1^N)(Y_2^P(s) - Y_2^N) \}$

Zastosowanie

Dynamika (model Lanchestera) i funkcjonały zysku:

$$\dot{x} = u_1(1 - x) - u_2x, \quad J_i = x_i(T) + \int_0^T \left(x_i - \frac{1}{2}u_i^2 \right) dt,$$

Zastosowanie

Dynamika (model Lanchestera) i funkcjonały zysku:

$$\dot{x} = u_1(1 - x) - u_2x, \quad J_i = x_i(T) + \int_0^T \left(x_i - \frac{1}{2}u_i^2 \right) dt,$$

Funkcjonały natychmiastowego zysku:

$$Y_i(x, p_1, p_2, u_1, u_2) = p_i(u_1(1 - x) - u_2x) + x_i - \frac{1}{2}u_i^2, \quad i = 1, 2.$$

Strategie Pareto - optymalne:

$$u_1^P = (p_1 + \frac{1}{s}p_2)(1 - x), \quad u_2^P = -(sp_1 + p_2)x.$$

Korzystając z kryterium Nasha szukana funkcja s to:

$$s(x, p_1, p_2) = \left(\frac{p_2(1 - x)}{p_1x} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Dyskretny model Lanchestera – dotychczasowe badania

$$x(t) - x(t-1) = k_1 u_1(t)(1 - x(t-1)) - k_2 u_2(t)x(t-1),$$

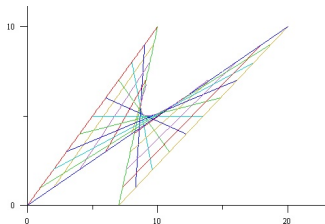
Równowaga Nasha w pętli otwartej i w pętli zamkniętej -

- ❶ badanie rynku Coca-Cola vs Pepsi-Cola:
 - skończony horyzont czasowy: Wang i Wu (2001);
 - nieskończony horyzont czasowy: Chintagunta i Vilcassim (1992);
- ❷ Wang i Wu (2001) - wykorzystanie do badania rynku papierosów (Marlboro vs Winston), piwa (Anheuser-Busch vs Miller).

Dopełnienie badań: rozwiązanie problemu Coca-Cola vs Pepsi-Cola za pomocą strategii semi - kooperatywnych.

Wyniki dodatkowe

- ❶ Strategie semi - kooperatywne dla :
 - gier bimatrycowych,
 - 3-osobowych gier macierzowych – artykuł pt. „Small type strategies which provide a strong Nash equilibrium in repeated games for 3 players” (wysłany do publikacji, lipiec 2015);
- ❷ Geometryczna klasyfikacja gier bimatrycowych, bazująca na własnościach topologicznych obraców wypłat.



Bibliografia

1. Bressan A., Shen W. (2004) „Semi-cooperative strategies for differential games”, Internat. J. Game Theory 32, 561-593.
2. Chintagunta P.K., Vilcassim N.J. (1992) „An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly”, Management Sci. 38, 1230-1244.
3. Nash J. (1950) „The bargaining problem”, Econometrica 18, 155-162.
4. Plaskacz S., Zwierzchowska J. (2015) „Smale type strategies which provide a strong Nash equilibrium in repeated games for 3 players”, przesłany do publikacji.
5. Wang Q., Wu Z. (2001) „A duopolic model of dynamic competitive advertising”, Eur J Oper Res 128, 213-226.
6. Zwierzchowska J. (2015) „Hyperbolicity of systems describing value functions in differential games which model duopoly problems”, Decision Making in Manufacturing and Services 9.



Projekt „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno – przyrodniczych” realizowany w ramach poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Dziękuję za uwagę!



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego