



interdyscyplinarne  
studia doktoranckie  
matematyczno-  
przyrodnicze



Projekt „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno – przyrodniczych” realizowany w ramach poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

# Bifurkacje centralnych konfiguracji zagadnienia N ciał

Marta Kowalczyk

Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu


Toruń, wrzesień 2015




Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





Celem mojego wystąpienia jest sformułowanie warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie lokalnych oraz globalnych bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia  $N$  ciał.

 M. Kowalczyk, *Bifurcations of critical orbits of invariant potentials with applications to bifurcations of central configurations of the  $N$ -body problem*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 24, 108-125 (2015).



 M. Kowalczyk, *Topological bifurcations of spatial central configurations in the  $N$ -body problem*, przedstawiona do publikacji kwiecień 2015.

Celem mojego wystąpienia jest sformułowanie warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie lokalnych oraz globalnych bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia  $N$  ciał.

 M. Kowalczyk, *Bifurcations of critical orbits of invariant potentials with applications to bifurcations of central configurations of the  $N$ -body problem*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 24, 108-125 (2015).

 M. Kowalczyk, *Topological bifurcations of spatial central configurations in the  $N$ -body problem*, przedstawiona do publikacji kwiecień 2015.

Celem mojego wystąpienia jest sformułowanie warunków koniecznych i dostatecznych na istnienie lokalnych oraz globalnych bifurkacji centralnych konfiguracji zagadnienia  $N$  ciał.

-  M. Kowalczyk, *Bifurcations of critical orbits of invariant potentials with applications to bifurcations of central configurations of the  $N$ -body problem*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 24, 108-125 (2015).
-  M. Kowalczyk, *Topological bifurcations of spatial central configurations in the  $N$ -body problem*, przedstawiona do publikacji kwiecień 2015.

## 1 Preliminaria

- Newtonowskie Równania Ruchu
- Równanie centralnych konfiguracji
- Definicja lokalnej i globalnej bifurkacji

## 2 Bifurkacje

- Warunek konieczny istnienia bifurkacji
- Warunek dostateczny istnienia bifurkacji

## 3 Bifurkacje centralnych konfiguracji

Rozpatrujemy  $N$  ciał o położeniach  $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{R}^d$ , gdzie  $d = 2, 3$ , oraz dodatnich masach  $m_1, \dots, m_N$ .

Ruch  $N$  punktów materialnych opisywany jest następującym układem równań różniczkowych:

$$m_i \ddot{q}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{q_i - q_j}{|q_i - q_j|^3}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Rozpatrujemy  $N$  ciał o położeniach  $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{R}^d$ , gdzie  $d = 2, 3$ , oraz dodatnich masach  $m_1, \dots, m_N$ .

Ruch  $N$  punktów materialnych opisywany jest następującym układem równań różniczkowych:

$$m_i \ddot{q}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{q_i - q_j}{|q_i - q_j|^3}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Rozpatrujemy  $N$  ciał o położeniach  $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{R}^d$ , gdzie  $d = 2, 3$ , oraz dodatnich masach  $m_1, \dots, m_N$ .

Ruch  $N$  punktów materialnych opisywany jest następującym układem równań różniczkowych:

$$m_i \ddot{q}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^N G m_i m_j \frac{q_i - q_j}{|q_i - q_j|^3}, \quad i = 1, \dots, N.$$

## Równoważnie

$$M\ddot{q} = \nabla_q U(q, m), \quad (1)$$

gdzie  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  oraz potencjał  $U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  określony jest formułą

$$U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

dla  $q \in \Omega := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\}$ .

Równoważnie

$$M\ddot{q} = \nabla_q U(q, m), \quad (1)$$

gdzie  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  oraz potencjał

$U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  określony jest formułą

$$U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

dla  $q \in \Omega := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\}$ .

Równoważnie

$$M\ddot{q} = \nabla_q U(q, m), \quad (1)$$

gdzie  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  oraz potencjał

$U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  określony jest formułą

$$U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

dla  $q \in \Omega := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\}$ .

Równoważnie

$$M\ddot{q} = \nabla_q U(q, m), \quad (1)$$

gdzie  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  oraz potencjał

$U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  określony jest formułą

$$U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

dla  $q \in \Omega := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\}$ .

Równoważnie

$$M\ddot{q} = \nabla_q U(q, m), \quad (1)$$

gdzie  $M := \text{diag}(m_1, \dots, m_N)$  oraz potencjał

$U : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  określony jest formułą

$$U(q, m) = U(q_1, \dots, q_N, m_1, \dots, m_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}$$

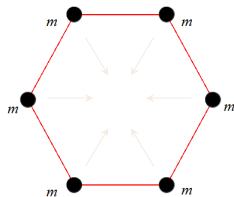
dla  $q \in \Omega := \{q = (q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{dN} : q_i \neq q_j \text{ dla } i \neq j\}$ .

## Definicja

Konfigurację  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  nazywamy centralną konfiguracją układu (1), o ile istnieje  $\lambda > 0$  taka, że  $\ddot{q} = -\lambda q$ .

Problem badania centralnych konfiguracji  
na liście najważniejszych problemów  
matematycznych XXI wieku:

S. Smale, *Mathematical problems for the next  
century*, *The Mathematical Intelligencer* 20(2),  
7-15 (1998).

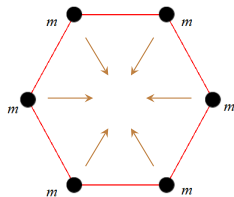


## Definicja

Konfigurację  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  nazywamy centralną konfiguracją układu (1), o ile istnieje  $\lambda > 0$  taka, że  $\ddot{q} = -\lambda q$ .

Problem badania centralnych konfiguracji  
na liście najważniejszych problemów  
matematycznych XXI wieku:

S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, *The Mathematical Intelligencer* 20(2), 7-15 (1998).

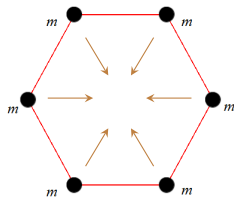


## Definicja

Konfigurację  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  nazywamy centralną konfiguracją układu (1), o ile istnieje  $\lambda > 0$  taka, że  $\ddot{q} = -\lambda q$ .

Problem badania centralnych konfiguracji na liście najważniejszych problemów matematycznych XXI wieku:

S. Smale, *Mathematical problems for the next century*, *The Mathematical Intelligencer* 20(2), 7-15 (1998).



## Własności centralnych konfiguracji:

- 1 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz liczby  $r \in \mathbb{R}$ , konfiguracja  $rq$  jest centralna,
- 2 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz macierzy  $g \in SO(d)$ , konfiguracja  $gq$  jest centralna.

Działanie grupy  $SO(d)$  na  $\Omega$  dane jest formułą

$$SO(d) \times \Omega \ni (g, q) = (g, (q_1, \dots, q_N)) \mapsto g \cdot q = (g \cdot q_1, \dots, g \cdot q_N) \in \Omega.$$

Własności centralnych konfiguracji:

- 1 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz liczby  $r \in \mathbb{R}$ , konfiguracja  $rq$  jest centralna,
- 2 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz macierzy  $g \in SO(d)$ , konfiguracja  $gq$  jest centralna.

Działanie grupy  $SO(d)$  na  $\Omega$  dane jest formułą

$$SO(d) \times \Omega \ni (g, q) = (g, (q_1, \dots, q_N)) \mapsto g \cdot q = (g \cdot q_1, \dots, g \cdot q_N) \in \Omega.$$

Własności centralnych konfiguracji:

- 1 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz liczby  $r \in \mathbb{R}$ , konfiguracja  $rq$  jest centralna,
- 2 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz macierzy  $g \in SO(d)$ , konfiguracja  $gq$  jest centralna.

Działanie grupy  $SO(d)$  na  $\Omega$  dane jest formułą

$$SO(d) \times \Omega \ni (g, q) = (g, (q_1, \dots, q_N)) \mapsto g \cdot q = (g \cdot q_1, \dots, g \cdot q_N) \in \Omega.$$

Własności centralnych konfiguracji:

- 1 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz liczby  $r \in \mathbb{R}$ , konfiguracja  $rq$  jest centralna,
- 2 dla każdej centralnej konfiguracji  $q$  oraz macierzy  $g \in SO(d)$ , konfiguracja  $gq$  jest centralna.

Działanie grupy  $SO(d)$  na  $\Omega$  dane jest formułą

$$SO(d) \times \Omega \ni (g, q) = (g, (q_1, \dots, q_N)) \mapsto g \cdot q = (g \cdot q_1, \dots, g \cdot q_N) \in \Omega.$$

Biorąc pod uwagę powyższe,  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  jest centralną konfiguracją układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\lambda \nabla_q I(q, m) + \nabla_q U(q, m) = 0, \quad (2)$$

gdzie odwzorowanie  $I : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$I(q, m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |q_j|^2.$$

Biorąc pod uwagę powyższe,  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  jest centralną konfiguracją układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\lambda \nabla_q I(q, m) + \nabla_q U(q, m) = 0, \quad (2)$$

gdzie odwzorowanie  $I : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$I(q, m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |q_j|^2.$$

Biorąc pod uwagę powyższe,  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  jest centralną konfiguracją układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\lambda \nabla_q I(q, m) + \nabla_q U(q, m) = 0, \quad (2)$$

gdzie odwzorowanie  $I : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$I(q, m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |q_j|^2.$$

Biorąc pod uwagę powyższe,  $q = (q_1, \dots, q_N) \in \Omega$  jest centralną konfiguracją układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$\lambda \nabla_q I(q, m) + \nabla_q U(q, m) = 0, \quad (2)$$

gdzie odwzorowanie  $I : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$I(q, m) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j |q_j|^2.$$

W konsekwencji, problem badania centralnych konfiguracji został sprowadzony do badania  $SO(d)$ -orbit rozwiązań równania postaci

$$\nabla_q \hat{\varphi}(q, m) = 0, \quad (3)$$

gdzie  $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$\hat{\varphi}(q, m) = U(q, m) + \lambda I(q, m).$$

W konsekwencji, problem badania centralnych konfiguracji został sprowadzony do badania  $SO(d)$ -orbit rozwiązań równania postaci

$$\nabla_q \hat{\varphi}(q, m) = 0, \quad (3)$$

gdzie  $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$\hat{\varphi}(q, m) = U(q, m) + \lambda I(q, m).$$

W konsekwencji, problem badania centralnych konfiguracji został sprowadzony do badania  $SO(d)$ -orbit rozwiązań równania postaci

$$\nabla_q \hat{\varphi}(q, m) = 0, \quad (3)$$

gdzie  $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$\hat{\varphi}(q, m) = U(q, m) + \lambda I(q, m).$$

W konsekwencji, problem badania centralnych konfiguracji został sprowadzony do badania  $SO(d)$ -orbit rozwiązań równania postaci

$$\nabla_q \hat{\varphi}(q, m) = 0, \quad (3)$$

gdzie  $\hat{\varphi} : \Omega \times (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$  dane jest formułą

$$\hat{\varphi}(q, m) = U(q, m) + \lambda I(q, m).$$

Założmy dodatkowo, że istnieją ciągłe odwzorowania

$$1 \quad w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega,$$

$$2 \quad m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^N$$

takie, że

$$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0.$$

Zdefiniujmy potencjał  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  formułą

$$\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (0, +\infty)} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(0).$$

Założmy dodatkowo, że istnieją ciągłe odwzorowania

$$\mathbf{1} \quad w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega,$$

$$\mathbf{2} \quad m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^N$$

takie, że

$$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0.$$

Zdefiniujmy potencjał  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  formułą

$$\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (0, +\infty)} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(0).$$

Założmy dodatkowo, że istnieją ciągłe odwzorowania

$$\boxed{1} \quad w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega,$$

$$\boxed{2} \quad m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^N$$

takie, że

$$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0.$$

Zdefiniujmy potencjał  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  formułą

$$\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (0, +\infty)} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(0).$$

Założmy dodatkowo, że istnieją ciągłe odwzorowania

$$\boxed{1} \quad w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega,$$

$$\boxed{2} \quad m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^N$$

takie, że

$$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0.$$

Zdefiniujmy potencjał  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  formułą

$$\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (0, +\infty)} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(0).$$

Założmy dodatkowo, że istnieją ciągłe odwzorowania

$$\boxed{1} \quad w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega,$$

$$\boxed{2} \quad m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^N$$

takie, że

$$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0.$$

Zdefiniujmy potencjał  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  formułą

$$\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (0, +\infty)} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(0).$$

Założmy dodatkowo, że istnieją ciągłe odwzorowania

$$\boxed{1} \quad w : (0, +\infty) \rightarrow \Omega,$$

$$\boxed{2} \quad m : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)^N$$

takie, że

$$\nabla_q \hat{\varphi}(w(\rho), m(\rho)) = 0.$$

Zdefiniujmy potencjał  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  formułą

$$\varphi(q, \rho) = \hat{\varphi}(q, m(\rho)).$$

Wówczas

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\rho \in (0, +\infty)} SO(d)(w(\rho)) \times \{\rho\} \subset (\nabla_q \varphi)^{-1}(0).$$

Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .

Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

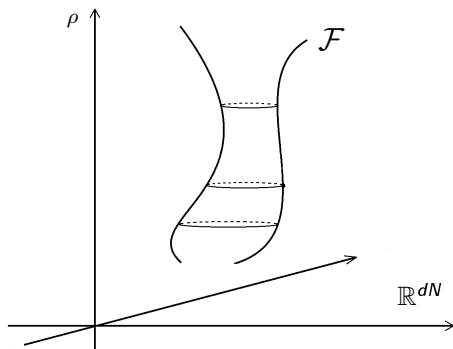
$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .

Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

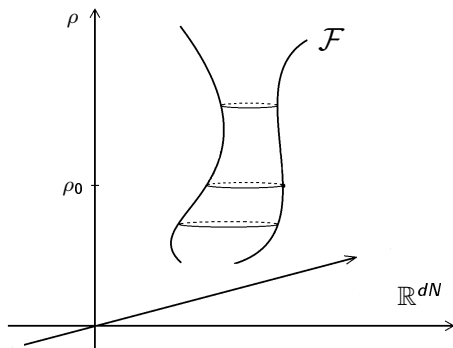
Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

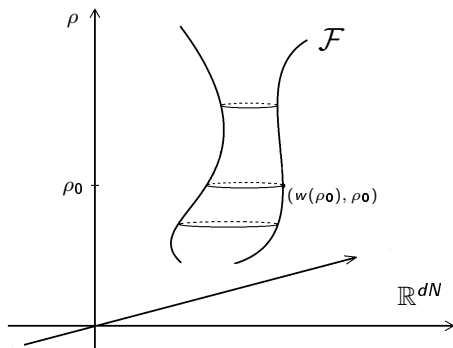
Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

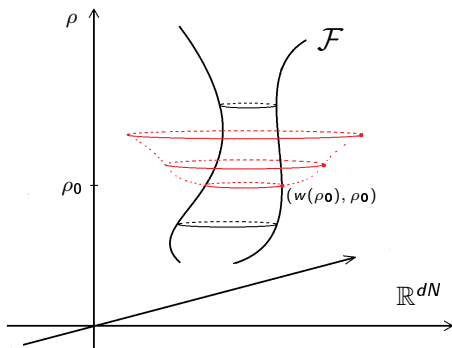
Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

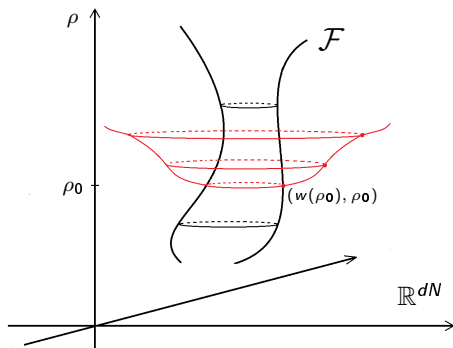
Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

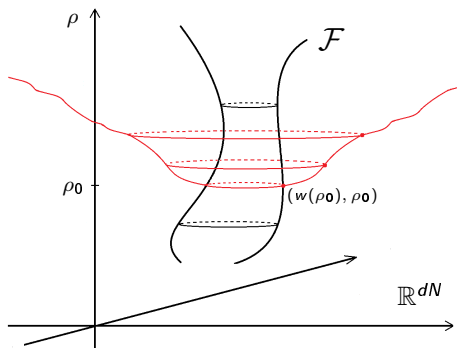
Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

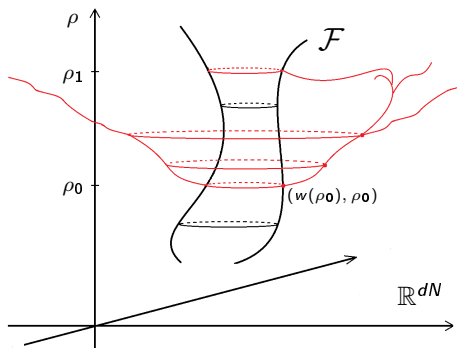
Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



Rozpatrujemy równanie następującej postaci:

$$\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0. \quad (4)$$

Ustalmy parametr  $\rho_0 \in (0, +\infty)$ . Symbolem  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  oznaczamy  $SO(d)(w(\rho_0)) \times \{\rho_0\}$ .



## Definicja

Mówimy, że z orbity  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  następuje lokalna bifurkacja nietrywialnych rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , o ile punkt  $(w(\rho_0), \rho_0) \in \mathcal{F}_{\rho_0}$  jest punktem skupienia zbioru

$$\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\}.$$

Bifurkacja jest globalna, jeżeli składowa spójności  $C(\rho_0)$  zbioru  $cl(\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\})$  zawierająca  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  nie jest zwarta lub  $(C(\rho_0) \setminus \mathcal{F}_{\rho_0}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

Parametr  $\rho_0$  nazywamy wówczas parametrem lokalnej (globalnej) bifurkacji, a orbitę  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  orbitą lokalnej (globalnej) bifurkacji.

## Definicja

Mówimy, że z orbity  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  następuje lokalna bifurkacja nietrywialnych rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , o ile punkt  $(w(\rho_0), \rho_0) \in \mathcal{F}_{\rho_0}$  jest punktem skupienia zbioru

$$\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\}.$$

Bifurkacja jest globalna, jeżeli składowa spójności  $C(\rho_0)$  zbioru  $cl(\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\})$  zawierająca  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  nie jest zwarta lub  $(C(\rho_0) \setminus \mathcal{F}_{\rho_0}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

Parametr  $\rho_0$  nazywamy wówczas parametrem lokalnej (globalnej) bifurkacji, a orbitę  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  orbitą lokalnej (globalnej) bifurkacji.

## Definicja

Mówimy, że z orbity  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  następuje lokalna bifurkacja nietrywialnych rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , o ile punkt  $(w(\rho_0), \rho_0) \in \mathcal{F}_{\rho_0}$  jest punktem skupienia zbioru

$$\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\}.$$

Bifurkacja jest globalna, jeżeli składowa spójności  $C(\rho_0)$  zbioru  $cl(\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\})$  zawierająca  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  nie jest zwarta lub  $(C(\rho_0) \setminus \mathcal{F}_{\rho_0}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

Parametr  $\rho_0$  nazywamy wówczas parametrem lokalnej (globalnej) bifurkacji, a orbitę  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  orbitą lokalnej (globalnej) bifurkacji.

## Definicja

Mówimy, że z orbity  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  następuje lokalna bifurkacja nietrywialnych rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , o ile punkt  $(w(\rho_0), \rho_0) \in \mathcal{F}_{\rho_0}$  jest punktem skupienia zbioru

$$\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\}.$$

Bifurkacja jest globalna, jeżeli składowa spójności  $C(\rho_0)$  zbioru  $cl(\{(q, \rho) \in (\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \mathcal{F} : \nabla_q \varphi(q, \rho) = 0\})$  zawierająca  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  nie jest zwarta lub  $(C(\rho_0) \setminus \mathcal{F}_{\rho_0}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ .

Parametr  $\rho_0$  nazywamy wówczas parametrem lokalnej (globalnej) bifurkacji, a orbitę  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  orbitą lokalnej (globalnej) bifurkacji.

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

- 1 Mamy trywialną rodzinę rozwiązań w równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$ , to znaczy  $\nabla_q \varphi(w(\rho), \rho) = 0$
- 2 Poszukujemy lokalnej oraz globalnej bifurkacji rozwiązań równania  $\nabla_q \varphi(q, \rho) = 0$  w otoczeniu trywialnej rodziny rozwiązań  $w$ .
- 3 W tym celu obliczamy hesjan potencjału  $\varphi : \Omega \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  wzdłuż trywialnej rodziny rozwiązań  $w$  na poziomie  $\rho_0 \in (0, +\infty)$  otrzymując, że

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) : T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array} \rightarrow T_{w(\rho_0)} \Omega = \begin{array}{c} T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0)) \\ \oplus \\ \mathbb{W} \end{array}$$

jest postaci

$$\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(w(\rho_0)) \end{bmatrix},$$

gdzie  $T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$  jest przestrzenią styczną do orbity  $SO(d)(w(\rho_0))$  w  $w(\rho_0)$  oraz  $\mathbb{W} = T_{w(\rho_0)} \Omega \ominus T_{w(\rho_0)} SO(d)(w(\rho_0))$ .

Na podstawie rozkładu hesjanu otrzymujemy, że

$$\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) \geq \dim SO(d)(w(\rho_0)).$$

### Warunek konieczny

Jeżeli orbita  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  jest orbitą lokalnej bifurkacji, to

$$\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) > \dim SO(d)(w(\rho_0)).$$

Na podstawie rozkładu hesjanu otrzymujemy, że

$$\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) \geq \dim SO(d)(w(\rho_0)).$$

### Warunek konieczny

Jeżeli orbita  $\mathcal{F}_{\rho_0}$  jest orbitą lokalnej bifurkacji, to

$$\dim \ker \nabla_v^2 \varphi(w(\rho_0), \rho_0) > \dim SO(d)(w(\rho_0)).$$

Symbolem  $m^-(A)$  oznaczamy indeks Morse'a macierzy symetrycznej  $A$ , to jest liczbę ujemnych wartości własnych (z krotnościami) macierzy  $A$ .

## Warunek dostateczny

Ustalmy parametry  $\rho^\pm \in \mathbb{R}$  takie, że  $\rho^- < \rho^+$  oraz

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim SO(d)(w(\rho^\pm)).$$

Jeżeli  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-)) \neq m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$ ,  
to istnieje parametr lokalnej bifurkacji  $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$ .

Co więcej, jeżeli liczby  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-))$  oraz  
 $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$  są różnej parzystości, to w przedziale  
 $(\rho^-, \rho^+)$  istnieje parametr globalnej bifurkacji.

Symbolem  $m^-(A)$  oznaczamy indeks Morse'a macierzy symetrycznej  $A$ , to jest liczbę ujemnych wartości własnych (z krotnościami) macierzy  $A$ .

## Warunek dostateczny

Ustalmy parametry  $\rho^\pm \in \mathbb{R}$  takie, że  $\rho^- < \rho^+$  oraz

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim SO(d)(w(\rho^\pm)).$$

Jeżeli  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-)) \neq m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$ ,  
to istnieje parametr lokalnej bifurkacji  $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$ .

Co więcej, jeżeli liczby  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-))$  oraz  
 $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$  są różnej parzystości, to w przedziale  
 $(\rho^-, \rho^+)$  istnieje parametr globalnej bifurkacji.

Symbolem  $m^-(A)$  oznaczamy indeks Morse'a macierzy symetrycznej  $A$ , to jest liczbę ujemnych wartości własnych (z krotnościami) macierzy  $A$ .

## Warunek dostateczny

Ustalmy parametry  $\rho^\pm \in \mathbb{R}$  takie, że  $\rho^- < \rho^+$  oraz

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim SO(d)(w(\rho^\pm)).$$

Jeżeli  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-)) \neq m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$ ,  
to istnieje parametr lokalnej bifurkacji  $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$ .

Co więcej, jeżeli liczby  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-))$  oraz  
 $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$  są różnej parzystości, to w przedziale  
 $(\rho^-, \rho^+)$  istnieje parametr globalnej bifurkacji.

Symbolem  $m^-(A)$  oznaczamy indeks Morse'a macierzy symetrycznej  $A$ , to jest liczbę ujemnych wartości własnych (z krotnościami) macierzy  $A$ .

## Warunek dostateczny

Ustalmy parametry  $\rho^\pm \in \mathbb{R}$  takie, że  $\rho^- < \rho^+$  oraz

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim SO(d)(w(\rho^\pm)).$$

Jeżeli  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-)) \neq m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$ ,  
to istnieje parametr lokalnej bifurkacji  $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$ .

Co więcej, jeżeli liczby  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-))$  oraz  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$  są różnej parzystości, to w przedziale  $(\rho^-, \rho^+)$  istnieje parametr globalnej bifurkacji.

Symbolem  $m^-(A)$  oznaczamy indeks Morse'a macierzy symetrycznej  $A$ , to jest liczbę ujemnych wartości własnych (z krotnościami) macierzy  $A$ .

## Warunek dostateczny

Ustalmy parametry  $\rho^\pm \in \mathbb{R}$  takie, że  $\rho^- < \rho^+$  oraz

$$\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho^\pm), \rho^\pm) = \dim SO(d)(w(\rho^\pm)).$$

Jeżeli  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-)) \neq m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$ ,

to istnieje parametr lokalnej bifurkacji  $\rho_0 \in (\rho^-, \rho^+)$ .

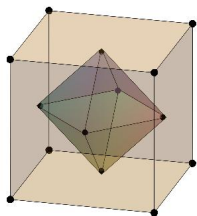
Co więcej, jeżeli liczby  $m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^-), \rho^-))$  oraz

$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho^+), \rho^+))$  są różnej parzystości, to w przedziale

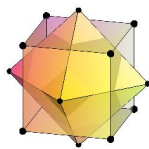
$(\rho^-, \rho^+)$  istnieje parametr globalnej bifurkacji.

# Centralne konfiguracje dwóch dualnych wielościanów foremnych problemu 14 ciał

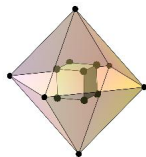
M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Spatial bi-stacked central configurations formed by two dual regular polyhedra*, J. Math. Anal. Appl. 413(2), 648-659 (2014).



(a)  $\rho \in (0, 1)$



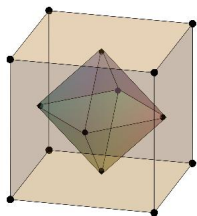
(b)  $\rho \in [1, 3]$



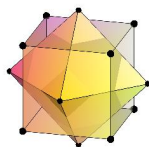
(c)  $\rho \in (3, +\infty)$

## Centralne konfiguracje dwóch dualnych wielościanów foremnych problemu 14 ciał

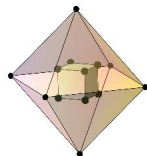
M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Spatial bi-stacked central configurations formed by two dual regular polyhedra*, J. Math. Anal. Appl. 413(2), 648-659 (2014).



(a)  $\rho \in (0, 1)$



(b)  $\rho \in [1, 3]$



(c)  $\rho \in (3, +\infty)$

## Centralne konfiguracje dwóch dualnych wielościanów foremnych problemu 14 ciał

M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Spatial bi-stacked central configurations formed by two dual regular polyhedra*, J. Math. Anal. Appl. 413(2), 648-659 (2014).

(a)  $\rho \in (0, 1)$

(b)  $\rho \in [1, 3]$

(c)  $\rho \in (3, +\infty)$

## Lemat

Niech  $\rho_1 = \frac{49}{100}$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\rho_3 = \frac{53}{100}$ ,  $\rho_4 = \frac{54}{100}$ ,  $\rho_5 = \frac{7}{10}$ ,  $\rho_6 = \frac{71}{100}$ ,  $\rho_7 = \frac{131}{100}$ ,  $\rho_8 = \frac{132}{100}$ ,  $\rho_9 = \frac{181}{100}$ ,  $\rho_{10} = \frac{182}{100}$ ,  $\rho_{11} = \frac{216}{100}$ ,  $\rho_{12} = \frac{217}{100}$ ,  $\rho_{13} = 4$ ,  $\rho_{14} = 5$ ,  $\rho_{15} = 6$ ,  $\rho_{16} = 7$ ,  $\rho_{17} = 8$ ,  $\rho_{18} = 17$  oraz  $\rho_{19} = 18$ . Wówczas  $\dim \ker \nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i) = \dim SO(3)(w(\rho_i)) = 3$  dla  $i = 1, \dots, 19$  oraz indeks Morse'a  $\nabla_q^2 \varphi(w(\cdot), \cdot)$  w  $\rho_i$  wynosi

$$m^-(\nabla_q^2 \varphi(w(\rho_i), \rho_i)) = \begin{cases} 8, & \text{for } i = 6, 13 \\ 7, & \text{for } i = 4, 5, 14 \\ 4 & \text{for } i = 2, 3, 15 \\ 3, & \text{for } i = 8, 9 \\ 2, & \text{for } i = 1, 12, 19 \\ 1, & \text{for } i = 16 \\ 0, & \text{for } i = 7, 10, 11, 17, 18 \end{cases} .$$

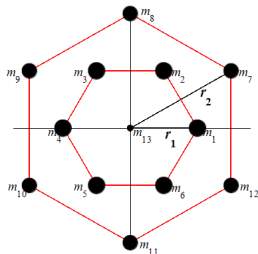
## Twierdzenie

Istnieją parametry lokalnych i globalnych bifurkacji.

## Centralne konfiguracje rozety

M. Sekiguchi, *Bifurcation of central configuration in the  $2N+1$  body problem*, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 90, 355-360 (2004)

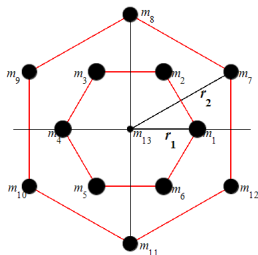
J. Lei, M. Santoprete, *Rosette central configurations, degenerate central configurations and bifurcations*, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 94(3), 271-287 (2006)



## Centralne konfiguracje rozety

M. Sekiguchi, *Bifurcation of central configuration in the  $2N+1$  body problem*, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 90, 355-360 (2004)

J. Lei, M. Santoprete, *Rosette central configurations, degenerate central configurations and bifurcations*, *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 94(3), 271-287 (2006)



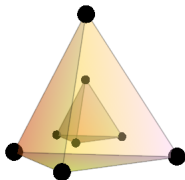
## Centralne konfiguracje rozety

M. Sekiguchi, *Bifurcation of central configuration in the  $2N+1$  body problem*, Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy 90, 355-360 (2004)

J. Lei, M. Santoprete, *Rosette central configurations, degenerate central configurations and bifurcations*, Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy 94(3), 271-287 (2006)

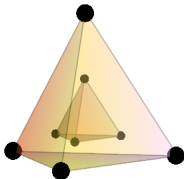
## Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych

M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial  $2n$ -body problem*, Journal of Geometry and Physics 58, 1241-1252 (2008)



## Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych

M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial  $2n$ -body problem*, Journal of Geometry and Physics 58, 1241-1252 (2008)

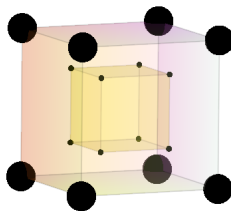
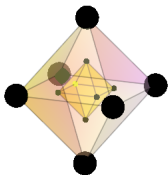


## Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych czworościanów foremnych

M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial  $2n$ -body problem*, Journal of Geometry and Physics 58, 1241-1252 (2008)

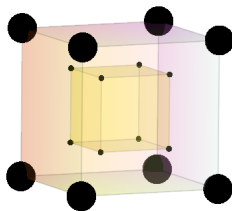
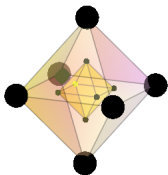
## Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych sześcianów oraz ośmiościanów foremnych

M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial  $2n$ -body problem*, Journal of Geometry and Physics 58, 1241-1252 (2008)



## Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych sześcianów oraz ośmiościanów foremnych

M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial  $2n$ -body problem*, Journal of Geometry and Physics 58, 1241-1252 (2008)



## Centralne konfiguracje dwóch zagnieżdżonych sześciątów oraz ośmiościanów foremnych

M. Corbera, J. Llibre, *Central configurations of nested regular polyhedra for the spatial  $2n$ -body problem*, Journal of Geometry and Physics 58, 1241-1252 (2008)



interdyscyplinarne  
studia doktoranckie  
matematyczno-  
przyrodnicze

Projekt „Wzmocnienie potencjału dydaktycznego UMK w Toruniu w dziedzinach matematyczno – przyrodniczych” realizowany w ramach poddziałania 4.1.1 Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

# Dziękuję za uwagę!



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

